

## 多入出力非線形制御系の時間領域安定解析

王 喜宏\*      松本 忠\*\*

### Time-Domain Stability Analysis on Multivariable Nonlinear Control Systems

Xihong WANG and Tadashi MATSUMOTO

(Received Aug. 29, 1997)

In this paper, an extension for Haddad's method, which is the time-domain stability analysis on scalar nonlinear control systems, to multivariable nonlinear control systems are proposed and two BIBO stability criteria and two global asymptotic stability criteria on them are presented by using boundedness and asymptoticity for solutions to the set of nonlinear inequalities with respect to characteristic quantities such as the quadrant components in multi-dimensional input-output space of a nonlinear controller, positive or negative areas of an impulse response function for a linear control object, and ultimate positive or negative bounds for input signals.

These results are useful for the stability analysis of nonlinear control systems with various types of fuzzy controllers as well as neural network controllers.

**Key Words :** Multivariable Nonlinear Control Systems, Time-domain Stability Analysis, BIBO Stability, Global Asymptotic Stability

#### 1. まえがき

非線形制御系の入出力安定性問題については、円板条件及びポポフ条件がよく知られている<sup>1)~3)</sup>。しかし、これらの結果は制御系の安定性を考察するとき、制御器の非線形特性のセクタ条件以外のほとんどの情報が無視されるので、得られる解析結果は比較的厳しいものとなることが多い。また、制御器の非線形特性が原点を通るセクタの中に存在することを要求している。しかし、非線形制御系の複雑性と多様性のため、制御器の非線形特性のセクタ条件の確立は困難、或いは確立不能の場合があるから、円板条件及びポポフ条件の結果をこのような場合の制御系の安定解析に適用できない。例えば、近年、発展されてきた言語的な記述を制御器に利用しているファジィ制御系<sup>4)~6)</sup>、及

び神経回路網理論を制御器に利用しているニューラルネットワーク制御系<sup>5),6)</sup>では、そのようなケースが多い。

系の情報をより多く利用して、より精確な（保守的でない）結果を得ることができるはずであるが、残念ながら、この方面の研究の成果は比較的少ない。位相面解析法<sup>1),2)</sup>及びリレー制御系の研究<sup>1),7)</sup>では、制御器の非線形特性の情報の全部が考慮されて、得られる結果は精確である。しかし、それらは系の次数あるいは制御器の特性を特定化した場合の研究である。他方、記述関数法<sup>1),2)</sup>では、非線形特性の主な情報を保留しているもので、得られる結果は比較的保守的でない。しかし、それは一種の近似方法である。したがって、より一般的な制御系に適用でき、かつ、あまり保守的でない安定解析法の明示が望まれる。

Haddadの論文<sup>8),9)</sup>は制御器の非線形特性のほとんど全部の情報を利用している。また、非線形特性の形に制限的な要求はしないため、より一般的な制御系に適用できる。その研究では線形部の情報の利用は比較的少ないが、依然として相当な成果を得ている。しかし、残念ながら、それは1入力1出力制御系に対するものであるため、その結果を実際の制御系に応用するには不都合である。Haddadの方法の拡張については、文献[10]では、それを多入出力非線形制御系へ適応する可能性が示唆されているに留まっており、詳しい適用法は述べられていない。また、文献[11]では、文献[10]の具体化として、2入力1出力制御器を持つファジィ制御系への適応が示されている。しかし、これらの結果は制御器の出力非線形特性が制御器の入力のそれぞれについて単調増加であるという厳しい前提条件に制約され、適用範囲が非常に狭い。それだけでなく、実際に文献[10],[11]の拡張法を用いて系の安定解析をするとき、それらの拡張法より得られる非線形連立不等式の解の最適化計算が必要となる。

一方、文献[12],[13],[14]で提案した拡張法では、入出力空間の象限分割を基本として考えるもので、制御器の非線形特性に何の制約条件も課さないだけでなく、系の安定解析に際して、非線形連立不等式に対する最適化計算を必要としない。そのため、得られた結果は普遍的な適用性を持つものとなる。

本論文では文献[12],[13],[14]の発展として、多入力多出力非線形制御器の入出力空間の象限分割を通じて、制御器の出力時間関数の終端における正、負最大値を与えるシステムの偏差信号の絶対値の集合を導出する。更に、この集合は制御器の非線形特性の象限特徴量、制御対象のインパルス応答関数の正、負面積、入力信号の終端上、下界に関する非線形代数不等式の連立により決められることを示す。この結果は系の有界入力有界出力(BIBO)安定性の十分条件(定理1、2)と大域漸近安定性(G.A.S.)の十分条件(定理3、4)を集合の有界性と零集合への収束性で与えるものである。2節では、本安定解析法の考え方を詳述し、3節では、特徴量及び集合の定義などを示し、4節では、安定定理を述べる。終わりに5節に二つの具体例に対する安定解析結果を示す。更に安定条件としての四つの定理の証明を付録に与える。

## 2. 安定解析の基本的考え方

### 2.1 安定解析のアプローチ

図1に示すような $k$ 入力 $l$ 出力非線形制御器を持つ多入出力非線形フィードバック制御系を考える。 $r(t) = \{r_1(t), r_2(t), \dots, r_k(t)\}^T$ は系の入力、 $g(t) = \{g_1(t), g_2(t), \dots, g_l(t)\}^T$ は制御対象の

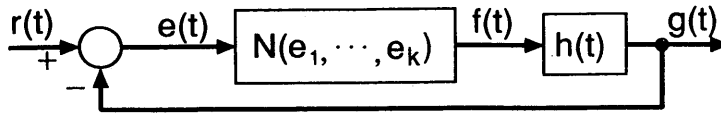


図1 非線形制御系

完全応答(系の出力),  $g_0(t) = \{g_{10}(t), g_{20}(t), \dots, g_{k0}(t)\}^T$ はそれの零入力応答,  $e(t) = \{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}^T$ は系の偏差信号(制御器の入力)である。 $h(t)$ は制御対象のインパルス応答行列,

$$h(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t), h_{12}(t), \dots, h_{1i}(t) \\ h_{12}(t), h_{22}(t), \dots, h_{2i}(t) \\ \vdots \\ h_{ki}(t), h_{k2}(t), \dots, h_{ki}(t) \end{bmatrix}.$$

ここで, 制御対象が線形・安定な系であるとし(それゆえ以下制御対象を線形部とも呼ぶ),

$$h(t) \in \mathcal{L}_1, \quad \|g_0(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

とする。制御器は即時的非線形特性をもつものとし,

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) = N_1(e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)) \\ f_2(t) = N_2(e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)) \\ \vdots \\ f_i(t) = N_i(e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

また, 系は有限逃避時間がないことを保証するため,

$$|f_j(t)| < \infty \quad (j=1, \dots, k), \quad \forall t < \infty$$

とする。こうしたシステムの方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} g(t) &= g_0(t) + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \\ f(t) &= N(e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)) \\ e(t) &= r(t) - g(t) \end{aligned} \quad (2)$$

さて, 図1の系に対して, 一般にシステムのI/O安定性はつぎのように定義されている<sup>1), 2)</sup>。

入力  $r \in \mathcal{L}_p$  ならば, 出力  $f$  及び  $g$  も  $\mathcal{L}_p$  に属する関数であるとする。そして,

$$\|f\|_p \leq \gamma \|r\|_p + \beta$$

$$\|g\|_p \leq \gamma \|r\|_p + \beta$$

が成立するような非負数  $\gamma, \beta$  が存在するとき, このシステムは  $\mathcal{L}_p$  安定であるという。 $p=\infty$  の

$$\operatorname{ess. sup}_{0 \leq t < \infty} \max_j |f_j(t)| \leq \gamma (\operatorname{ess. sup}_{0 \leq t < \infty} \max_i |r_i(t)|) + \beta \quad (3)$$

$$\operatorname{ess. sup}_{0 \leq t < \infty} \max_j |g_j(t)| \leq \gamma (\operatorname{ess. sup}_{0 \leq t < \infty} \max_i |r_i(t)|) + \beta \quad (4)$$

ときの  $\mathcal{L}_\infty$  安定を有界入力有界出力(BIBO)安定という。

ここで, 制御対象は線形安定な系であることから,  $f$  が有界であるならば,  $g$  も有界であるといえる。したがって, 系のBIBO安定性を検討するには  $f$  の有界性を検討すればよい。そのため,

(1) 式の制御器の開ループ特性を見てみよう。

まず,  $f(t)$  に対して, 単調増加(発散)時間系列  $T_l: T_1 < T_2 < \dots$  ( $l=1, 2, \dots$ ) を定義できる。この時間系列  $T_l$  は任意に与えられる  $\varepsilon > 0$ , 及び任意の正整数  $l$  に対して,  $t \geq T_{l+1}$  のとき,

$$|E_{l,l}(t)| = \left| -g_{l,0}(t) - \sum_{j=1}^l \int_0^{T_l} h_{l,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \right| < \varepsilon \quad (5)$$

を満足するものである (このことについての証明は付録の補題 2 を参照)。

また, このベクトル時間関数  $f(t)$  の各スカラー時間関数成分  $f_j(t)$  ( $j=1, \dots, \lambda$ ) を正の部分  $f_{j+}(t)$  と負の部分  $-f_{j-}(t)$  とに分解して,  $f_j(t) = f_{j+}(t) - f_{j-}(t)$  ( $= N_{j+}(\cdot) - N_{j-}(\cdot)$ ) と記すことができる。

次に, スカラー時間関数  $f_j(t)$  ( $j \in \{1, \dots, \lambda\}$ ) と時間系列  $T_l$  ( $l=1, 2, \dots$ ) に対して, 有限時間区間  $[T_l, T_{l+1}]$  を考える。 $[T_l, T_{l+1}]$  での  $f_{j+}(t)$  と  $f_{j-}(t)$  の最大値をそれぞれ  $W_{j,l}$  と  $Z_{j,l}$  とし, それらを与える時刻をそれぞれ  $t_{j,l}$ ,  $\tau_{j,l}$  とする。つまり,  $W_{j,l} = f_{j+}(t_{j,l})$ ,  $Z_{j,l} = f_{j-}(\tau_{j,l})$  である。すると,  $W_{j,l}$  と  $Z_{j,l}$  ( $l=1, 2, \dots$ ) に対応して, 2 つの時間系列を次式のごとく定義できる (図 2 参照)。

$$t_{j,1} < t_{j,2} < \dots < t_{j,l} < \dots, \quad \tau_{j,1} < \tau_{j,2} < \dots < \tau_{j,l} < \dots$$

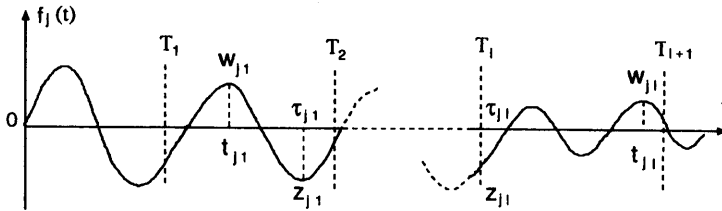


図 2 時間系列の定義

そして,  $f(t)$  は有限逃避時間がないことから,  $T_l$  系列の上でのある有限時間  $T_s$  ( $s$  は正の整数) を考え,  $T_s$  までの  $f(t)$  は有界であるから,  $T_s$  以後 (“終端”) の  $f(t)$  の有界性を検討する。

まず,  $T_s < t < \infty$  のときの  $f_{j\pm}(t)$  の振る舞いを考察する。 $f(t)$  は有限逃避時間がないから,  $T_s < t < \infty$  のとき  $f_j(t)$  が有界である。このとき  $f_{j+}(t)$  と  $f_{j-}(t)$  の最大値をそれぞれ  $W_{j,p}$  と  $Z_{j,q}$  とし, それらを与える時刻をそれぞれ  $t_{j,p}$ ,  $\tau_{j,q}$  とする。つまり,

$$W_{j,p} = \text{ess. sup}_{T_s \leq t < \infty} f_{j+}(t) = f_{j+}(t_{j,p}) = N_{j+}(e_1(t_{j,p}), \dots, e_k(t_{j,p})) \quad (6)$$

$$Z_{j,q} = \text{ess. sup}_{T_s \leq t < \infty} f_{j-}(t) = f_{j-}(\tau_{j,q}) = N_{j-}(e_1(t_{j,q}), \dots, e_k(t_{j,q})) \quad (7)$$

である。更に,  $t_{j,p}$ ,  $\tau_{j,q}$  における  $e_i$  の絶対値をそれぞれ  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$  とする。すなわち,

$$x_{i,j} \equiv |e_i(t_{j,p})|, \quad y_{i,j} \equiv |e_i(\tau_{j,q})|.$$

一方,  $f_j(t) = N_j(e_1, \dots, e_k)$  の  $k+1$  次元空間の中では,  $f_{j+}$  は空間の正半部に,  $f_{j-}$  は負半部に存在する。 $e_{i+}$ ,  $e_{i-}$  もそれぞれ異なる象限に存在する。従って, 3.1 節に述べるように非線形特性  $f_j(t)$  を象限分割して考えると,  $W_{j,p} = f_{j+}(t_{j,p})$  ( $Z_{j,q} = f_{j-}(\tau_{j,q})$ ) が  $m_j(n_j)$  象限に存在する場合では,

$$f_{j+}(t_{j,p}) = N_{j,m_j}(x_{1,j}, \dots, x_{k,j}) \quad (f_{j-}(\tau_{j,q}) = N_{j,n_j}(y_{1,j}, \dots, y_{k,j}))$$

である。ここで  $N_{j,m_j}(\cdot)$ ,  $N_{j,n_j}(\cdot)$  は 3.1 節に定義される非線形特性の象限特徴関数である。つまり,  $W_{j,p} = f_{j+}(t_{j,p})$  ( $Z_{j,q} = f_{j-}(\tau_{j,q})$ ) は  $x_{i,j}$  ( $y_{i,j}$ ) の関数として, 分割表現される。

すると,  $f_{j+}(t)$  ( $f_{j-}(t)$ ) が入出力空間の正負ともにただ 1 つの象限  $m_j(n_j)$  を有する場合に対し

ては,  $W_{jp} = f_{j+}(t_{jp})$  ( $Z_{jq} = f_{j-}(\tau_{jq})$ ) が  $m_j(n_j)$  象限に存在する。そして, もし,  $x_{ij}, y_{ij}$  が有界 (最大値が  $\sup x_{ij}, \sup y_{ij}$ ) であるならば,

$$f_{j+}(t_{jp}) = N_{j+}(x_{ij}, \dots, x_{kj}) \leq \sup_{Z_i \leq \sup x_{ij}} N_{j+}(z_i, \dots, z_k) = F_{j+}, \quad (8)$$

$$f_{j-}(\tau_{jq}) = N_{j-}(y_{ij}, \dots, y_{kj}) \leq \sup_{Z_i \leq \sup y_{ij}} N_{j-}(z_i, \dots, z_k) = F_{j-}, \quad (9)$$

また,  $f_{j+}(t)$  ( $f_{j-}(t)$ ) が複数の  $m_j(n_j)$  象限を有するとき, (8), (9) 式は次のこの2つの式となる。

$$f_{j+}(t_{jp}) = N_{j+}(x_{ij}, \dots, x_{kj}) \leq \max_{n_j} \sup_{Z_i \leq \sup x_{ij}} N_{j+}(z_i, \dots, z_k) = F_{j+}, \quad (10)$$

$$f_{j-}(\tau_{jq}) = N_{j-}(y_{ij}, \dots, y_{kj}) \leq \max_{n_j} \sup_{Z_i \leq \sup y_{ij}} N_{j-}(z_i, \dots, z_k) = F_{j-}, \quad (11)$$

次に,  $t = \infty$  のときの  $f_{j\pm}(t)$  の振る舞いを見極める。

(8)~(11) 式からわかるように,  $f_{j+}(t_{jp})$ ,  $f_{j-}(\tau_{jq})$  の値が集合  $\{x_{ij}, y_{ij}\}$  の上界値によって制約されるが, もし, 成り立つ集合  $\{x_{ij}, y_{ij}\}$  が  $p, q$  に依存しなければ, (8)~(11) 式は  $t = \infty$  にも成立する。

そうすると,  $\{x_{ij}, y_{ij}\}$  が有界である場合には, (8)~(11) 式で得られる  $F_{j\pm}$  は  $f_{j\pm}(t)$  の終端上、下界となり, 系はBIB0安定である。更に, 原点を通る非線形特性を持つ系に対して,  $t \rightarrow \infty$  の時, 集合  $\{x_{ij}, y_{ij}\}$  のすべての要素が0に近づくならば,  $F_{j\pm}$  も0に近づき,  $f(t) \rightarrow 0$  となる。ゆえに, 系がG. A. S. であることが分かる。

$\{x_{ij}, y_{ij}\}$  が有界値をもたなければ, この方法を用いて系の安定解析を行うことはできない。

2.2節では, 集合  $\{x_{ij}, y_{ij}\}$  がいかに成り立つかについて述べ, また集合  $\{x_{ij}, y_{ij}\}$  が  $p, q$  に依存しないことをも示す。

## 2. 2 集合の成り立ち方

まず, システム方程式から

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - g_0(t) - \int_0^{T_+} h(t-\tau) f(\tau) d\tau - \int_{T_+}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \\ &= r(t) + E_+(t) - \int_{T_+}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

ここで,  $E_+(t) = -g_0(t) - \int_0^{T_+} h(t-\tau) f(\tau) d\tau$ 。(5) 式により,  $t > T_+$  のとき,  $|E_+(t)|$  は有限である。

ここで,  $|E_+(t)| < \delta$  と記す。ただし,  $\delta$  は有限な正数である。

次に,  $e(t) = e_+(t) - e_-(t)$ ,  $h(t) = h_+(t) - h_-(t)$  と分解して, 更に, 3.2節に述べる  $r(t)$  の終端上、下界  $R_+$  と  $R_-$  を導入すると, (12) 式から次の二つの式を得る。

$$e_+(t) < R_+ + \delta + \int_{T_+}^t h_-(t-\tau) f_+(\tau) d\tau + \int_{T_+}^t h_+(t-\tau) f_-(\tau) d\tau \quad (13)$$

$$e_-(t) < R_- + \delta + \int_{T_+}^t h_+(t-\tau) f_+(\tau) d\tau + \int_{T_+}^t h_-(t-\tau) f_-(\tau) d\tau \quad (14)$$

いま,  $t = t_{jp}$  と取り, (13) 式から次式を得る。

$$e_+(t_{jp}) < R_+ + \delta + \left( \int_{T_+}^{t_{jp}} h_-(t_{jp}-\tau) d\tau \right) W_p + \left( \int_{T_+}^{t_{jp}} h_+(t_{jp}-\tau) d\tau \right) Z_q$$

$$\begin{aligned}
& < R_+ + \delta + \left( \int_0^{\infty} h_-(t) dt \right) W_p + \left( \int_0^{\infty} h_+(t) dt \right) Z_q \\
& = R_+ + \delta + A_- W_p + A_+ Z_q
\end{aligned} \tag{15}$$

ここで、 $A_{\pm} = \int_0^{\infty} h_{\pm}(t) dt$  は3.3節に定義する制御対象のインパルス応答の正、負面積である。

$$W_p = \{W_{1p}, \dots, W_{lp}\}^T, Z_q = \{Z_{1q}, \dots, Z_{lq}\}^T.$$

また、(14)式から次式を得る。

$$e_-(t_{jp}) < R_- + \delta + A_- W_p + A_- Z_q \tag{16}$$

同様に、 $t = \tau_{jq}$ を(13), (14)式に代入すると、次の2つの式も得られる。

$$e_+(\tau_{jq}) < R_+ + \delta + A_- W_p + A_+ Z_q \tag{17}$$

$$e_-(\tau_{jq}) < R_- + \delta + A_+ W_p + A_- Z_q \tag{18}$$

(15), (16)式は、 $t > T_s$ のときの $f_j(t_{jp})$ に対応した $|e(t_{jp})| = x_j$ の限界値を与えるものであり、(17), (18)式は $f_j(\tau_{jq})$ に対応した $|e(\tau_{jq})| = y_j$ の限界値を与えるものである。ただし、この4つの式の中の $W_p, Z_q$ は(6), (7)式で与えられているが、その成分 $W_{jp}(Z_{jq})$ は非線形特性の入出力空間における存在形態により $x_{ij}(y_{ij})$ の関数として分割表現される。また、 $e_i$ の成分の $e_{i+}$ と $e_{i-}$ は異なる象限により分けられるのである。従って、もし、3.1節に述べるように非線形特性 $f_i(t)$ を象限分割し、そして $f_j(t_{jp})$  ( $f_j(\tau_{jq})$ )は $m_j(n_j)$ 象限に存在するならば、(15)~(18)式により、以下に詳述されるようにしてその $f_j$ の存在形態に対して集合 $\{x_{ij}, y_{ij}\}$ が得られることが理解できる。

以下は記述の簡単化のため、1入力1出力制御器を持つ制御系( $k=1, l=1$ )を例にして、制御器の非線形特性が1、3象限に存在すると仮定した場合の集合 $\{(x_{ij}, y_{ij}) \mid (i=1; j=1)\}$ の成り立ちについて説明する。

まず、 $f(t) = f_1(t) = N_1(e_1(t))$ の入出力空間の中で、第1象限では、 $W_{1p} = f_{1+}(t_{1p}) = N_1(e_1(t_{1p})) = N_{11}(x_{11})$ 、 $x_{11} = |e_1(t_{1p})| = e_1(t_{1p}) = e_{1+}(t_{1p})$ 。第3象限では、 $Z_{1q} = f_{1-}(\tau_{1q}) = -N_1(e_1(\tau_{1q})) = -N(-y_{11}) = N_{13}(y_{11})$ 、 $y_{11} = |e_1(\tau_{1q})| = -e_1(\tau_{1q}) = e_{1-}(\tau_{1q})$ を有する。ただし、 $N_{11}(\cdot)$ 、 $N_{13}(\cdot)$ は3.1節に定義する非線形特性の象限特徴量である。すると、(15), (18)式から、

$$x_{11} < R_+ + \delta + A_1 - N_{11}(x_{11}) + A_1 + N_{13}(y_{11})$$

$$y_{11} < R_- + \delta + A_1 + N_{11}(x_{11}) + A_1 - N_{13}(y_{11})$$

を得る。以上の両不等式を同時に満たす $x_{11}, y_{11}$ 、つまり不等式の連立解は、求める集合 $\{(x_{ij}, y_{ij}) \mid (i=1; j=1)\}$ である。ただし、この集合は非線形特性が1, 3象限に存在するという仮定に基づいたものである。また、正数 $\delta$ を自変数とするものである。ここで、 $\delta$ を自変数というのは、 $\delta$ の存在は(5)式の存在を意味していて、 $\delta$ の大きさは $T_s$ の大きさを決める。つまり、 $\delta$ の大きさはどれだけの時間( $T_s$ )を経過した後(いわゆる“終端”)のシステムの振る舞いを考えるかを定めるものであるからである。それゆえ、上述の集合を $L_{1,3,1}(\delta)$ と記す。つまり、

$$L_{1,3,1}(\delta) = \{(x_{11}, x_{21}, y_{11}, y_{21}) \mid D_1, D_1'\},$$

$$D_1 : x_{11} < R_+ + \delta + A_1 - N_{11}(x_{11}) + A_1 + N_{13}(y_{11})$$

$$D_1^1: y_{11} < R_{1-} + f + A_1 + N_{11}(x_{11}) + A_1 - N_{13}(y_{11})$$

同様の考え方で、多入力多出力系の場合の集合  $\{(x_{ij}, y_{ij}) \mid (i=1, \dots, k; j=1, \dots, \lambda)\}$  をも (6), (7) 式及び (15)～(18) 式より得られる。それらの定義は 3.4 節に与える。

上式及び 3.4 節に与える集合の定義式 ((22) 式) からわかるように、非線形特性の象限分割を基本に成り立たれる集合  $\{x_{ij}, y_{ij}\}$  は、与えられる、或いは求められる定数  $\delta$ ,  $R_{i\pm}$ ,  $A_{i,j\pm}$  と非線形特性の象限特微量  $N_{mj}(x_{1j}, \dots, x_{kj})$ ,  $N_{nj}(y_{1j}, \dots, y_{lj})$  だけに依存して、 $W_s$ ,  $Z_s$  には依存しない。つまり、 $p$ ,  $q$  には依存しないことがわかる。

以上のような考え方で、われわれは系の BIBO 安定及び G. A. S. の安定判別を集合  $\{(x_{ij}, y_{ij}) \mid (i=1, \dots, k; j=1, \dots, \lambda)\}$  の有界性と原点への収束性の判別に帰着できる。

次節では本論文に必要な概念及び集合の定義を与え、そして、4 節に安定判別の詳細を与える。

### 3. 特微量及び集合の定義

#### 3. 1 象限分割による非線形特性の象限特微量

(1) 式の制御器の非線形特性に対して、各出力成分  $f_i(t)$  と  $k$  次元の入力  $e_i(t)$  ( $i=1, \dots, k$ ) は  $k+1$  次元空間を形成し、制御器の入出力空間の全体としては  $\lambda$  個の  $k+1$  次元空間となる。そして、各  $k+1$  次元空間を  $2^{k+1}$  個の象限に分割でき、入出力空間の全体を  $\lambda \times 2^{k+1}$  個の象限に分割できる。すると、各々の象限における入力信号の大きさと出力信号の大きさとの対応関係(関数)が得られる。ただし、これらの関数は正の変数を自変数とする正值関数である。このような関数を非線形特性の象限特微量と称し、次のように定義できる。

$$N_{jm}(u_1, \dots, u_k) = \begin{cases} N_{j+}(u_1^1, \dots, u_k^1), & N_j(e_1, \dots, e_k) > 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (j=1, \dots, \lambda; m_j=1, \dots, 2^k)_j \quad (1_j \sim 2^k)_j \text{ 象限} \quad (19)$$

$$N_{jn}(u_1, \dots, u_k) = \begin{cases} N_{j-}(u_1^1, \dots, u_k^1), & N_j(e_1, \dots, e_k) < 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (j=1, \dots, \lambda; n_j=(2^{k+1})_j, \dots, (2^{k+1})_j) \quad ((2^{k+1})_j \sim (2^{k+1})_j) \text{ 象限} \quad (20)$$

ただし、

$$u_i^1 = \begin{cases} u_i, & e_i \geq 0 \\ -u_i, & e_i < 0 \end{cases} \quad u_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, k)$$

ここで、 $j$  は出力  $f$  の成分  $f_j = N_j(e_1, \dots, e_k)$  に対応する部分空間 ( $k+1$  次元空間) の番号であり、 $m_j$ ,  $n_j$  はそれぞれ第  $j$  番目の部分空間の正半部 ( $f_j > 0$ ) と負半部 ( $f_j < 0$ ) の象限番号である。明らかに、 $N_{jm}(u_1, \dots, u_k)$  ( $N_{jn}(u_1, \dots, u_k)$ ) は  $j$  番部分空間における  $m_j$  ( $n_j$ ) 象限にある非線形特性の象限特微量と呼ぶことが妥当であることが分かる。

#### 3. 2 時間関数の終端上、下界

$R_{i+}$  ( $R_{i-}$ ) が関数  $r_i(t)$  の終端上(下)界であることは、 $T > 0$  が存在して、 $t > T$  のとき、 $r_i(t) < R_{i+}$  ( $r_i(t) > -R_{i-}$ ) ( $i=1, \dots, k$ ) となることである。同様に、 $F_{j+}$  ( $F_{j-}$ ) が関数  $f_j(t)$  の終端上(下)界と定義できる。

### 3. 3 制御対象のインパルス応答関数の正、負面積

線形部の特徴量として、制御対象のインパルス応答関数  $h_{ij}(t)$  ( $=h_{ij+}(t)-h_{ij-}(t)$ ) の正面積  $A_{ij+}$  と負面積  $A_{ij-}$  を導入し、次式に示すように定義する。

$$A_{ij+} = \int_0^{\infty} h_{ij+}(t) dt, \quad A_{ij-} = \int_0^{\infty} h_{ij-}(t) dt \quad (i=1, \dots, k; j=1, \dots, l) \quad (21)$$

上の定義式から分かるように、 $A_{ij+}$  は  $h_{ij}(t) > 0$  の面積の和であるから、正面積と言ひ、 $A_{ij-}$  は  $h_{ij}(t) < 0$  の面積の和の絶対値であるから、負面積と言う。

### 3. 4 集合の定義

2節に述べたように、制御器の非線形特性が入出力空間に異なる形態で存在するとき、(15)～(18)式から得られる集合  $\{x_{ij}, y_{ij}\}$  は異なる表現形式を有する。そこで、本論文では、3.1節による制御器入出力空間の象限分割に基づいて、各出力成分  $f_j$  ( $j=1, \dots, l$ ) の正の部分  $f_{j+}$  が存在する象限  $m_j$  と負の部分  $f_{j-}$  が存在する象限  $n_j$  の一つづつを取りあげて、非線形特性の入出力空間における存在形態を分割し、それを非線形特性の入出力空間における一つの存在形態と呼ぶことにする。また、これらの象限番号の組合せ (部分空間の番号  $j$  の小から大への順で) を一つの存在組合せと称し、 $m_1 m_2 \dots m_l n_1 n_2 \dots n_l$  と記す。明らかに、 $m_j = (1, \dots, 2^k)_j$ ,  $n_j = ((2^k+1), \dots, (2^{k+1}))_j$  ( $j=1, \dots, l$ ) であるから、このような組合せは総数が  $2^{2 \cdot k \cdot l}$  個ある。

一方、非線形特性が入出力空間のすべての部分空間で正の部分と負の部分を共に有するとは限らないことを考慮して、正の部分あるいは負の部分を有しない部分空間の象限番号を取り除いて、存在する分だけを取りあげて、非線形特性の存在する象限組合せを  $m_\alpha \dots m_\beta n_\phi \dots n_\phi$  と書くことにする。ここで、 $\alpha, \beta$  はそれぞれ非線形特性が入出力空間の中で正の部分を有する部分空間の番号の最小値と最大値であり、 $\phi, \phi$  はそれぞれ非線形特性が入出力空間の中で負の部分を有する部分空間の番号の最小値と最大値である。明らかに、非線形特性が入出力空間のすべての部分空間で正の部分と負の部分をともに有した場合では、 $\alpha = \phi = 1, \beta = \phi = l$  である。

これらの存在組合せに対応して、後述の補題5により、幾つかの集合  $L_{m_\alpha \dots m_\beta n_\phi \dots n_\phi}(\delta)$  を次式のごとく定義できる。

$$\begin{aligned} L_{m_\alpha \dots m_\beta n_\phi \dots n_\phi}(\delta) \\ = \{ (x_{1\alpha}, \dots, x_{k\beta}, y_{1\phi}, \dots, y_{l\phi}) \mid D_{1\alpha}, \dots, D_{k\beta}, D'_{1\phi}, \dots, D'_{l\phi} \}, \\ D_{i\alpha}: x_{i\alpha} < \sum_{b=\alpha}^{\beta} [A_{ibm_i} N_{bn_i}(x_{1b}, \dots, x_{kb})] + \sum_{b=\phi}^{\phi} [A_{ibn_i} N_{bn_i}(y_{1b}, \dots, y_{lb})] + R_{im_i} + \delta \\ D'_{i\phi}: y_{i\phi} < \sum_{b=\alpha}^{\beta} [A_{ibn_i} N_{bn_i}(x_{1b}, \dots, x_{kb})] + \sum_{b=\phi}^{\phi} [A_{ibm_i} N_{bn_i}(y_{1b}, \dots, y_{lb})] + R_{in_i} + \delta \\ (i=1, \dots, k; \alpha=\alpha, \dots, \beta; \phi=\phi, \dots, \phi) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $\delta$  は正自変数であり、符号  $A_{ibm_i}, A_{ibn_i}, A_{ibm_i}, A_{ibn_i}$  は  $A_{ib+}, A_{ib-}$  のいずれかの一つであり、 $R_{im_i}, R_{in_i}$  は  $R_{i+}, R_{i-}$  のいずれかの一つである。ただし、それらの符号の添字に“+”と“-”のどちらを取るかは  $m_i$  あるいは  $n_i$  象限の座標軸  $e_i$  の“+”( $>0$ )、“-”( $<0$ )により定めるものとする。具体的には、 $A_{ibm_i}$  と  $R_{im_i}$  の添字の“+”、“-”は  $m_i$  象限の座標軸  $e_i$  の“+”、“-”に一致し、 $A_{ibn_i}$  及び  $R_{in_i}$  の添字の“+”、“-”は  $n_i$  象限の座標軸  $e_i$  の“+”、“-”に一致する。 $A_{ibm_i}, A_{ibn_i}$  の添字“+”、“-”はそれぞれ  $A_{ibm_i}$  と  $A_{ibn_i}$  の添字“+”、“-”と反対である。たとえば、 $m_i$  象限にある座標



軸  $e_i$  の符号は “+” ( $e_i > 0$ ) であれば,  $A_{i b m_i} = A_{i b +}$ ,  $A_{i b \bar{m}_i} = A_{i b -}$ ,  $R_{i m_i} = R_{i +}$  である。

$L_{m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta)$  における  $x_{i \zeta}$ ,  $y_{i \theta}$  の最大値は

$$X_{i \zeta m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) = \sup \{x_{i \zeta} : (x_{1 a}, \dots, x_{k \beta}, y_{1 \theta}, \dots, y_{k \theta}) \in L_{m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta)\} \quad (23)$$

$$Y_{i \theta m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) = \sup \{y_{i \theta} : (x_{1 a}, \dots, x_{k \beta}, y_{1 \theta}, \dots, y_{k \theta}) \in L_{m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta)\} \quad (24)$$

である。ただし,  $i=1, \dots, k$ ;  $\zeta=a, \dots, \beta$ ;  $\theta=\theta, \dots, \theta$ 。

#### 4. 安定条件

##### 4. 1 有界入力有界出力(BIBO)安定性

図1の系において, 入力  $r_i(t)$  ( $i=1, \dots, k$ ) は有界, かつ終端上, 下界  $R_{i+}$ ,  $R_{i-}$  を持つとする。このとき, 次の二つの定理を得る。ここで, 定理1は定理2の特別ケースであるが, 説明を容易にするため, それを併記する。定理1と定理3の例は5節の例題1に, 定理2の例は例題2に与えられている。

定理1: 図1の系に対して, 制御器の非線形特性が3.4節に述べた存在形態の分割による象限組合せの  $m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s$  をただ一つ有する、つまり、入出力空間の各部分空間にともに単一の  $m_i$  ( $m_i \in \{1, \dots, 2^{k_i}\}$ ) ( $i=a, \dots, \beta$ ) 象限とあるいは単一の  $n_i$  ( $n_i \in \{(2^{k_i+1})_1, \dots, (2^{k_i+1})_s\}$ ) ( $\theta=\theta, \dots, \theta$ ) 象限に存在するとき, ある  $\delta > 0$  に対して, その単一の集合  $L_{m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta)$  が有界であるならば, 系はBIBO安定である。このとき,  $f(t)$  は次のような終端上, 下界を有する。

$$F_{\zeta+} = \sup N_{\zeta m_i}(u_1, \dots, u_k) \mid u_i \leq X_{i \zeta m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) \quad (\zeta=a, \dots, \beta), \quad (i=1, \dots, k)$$

$$F_{\theta-} = \sup N_{\theta n_i}(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \leq Y_{i \theta m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) \quad (\theta=\theta, \dots, \theta), \quad (i=1, \dots, k) \quad \blacksquare$$

定理2: 図1の系に対して, 制御器の非線形特性が3.4節に述べた存在形態の分割による象限組合せの  $m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s$  を複数有する、つまり、入出力空間の各部分空間に複数の  $m_i$  ( $m_i \in \{1, \dots, 2^{k_i}\}$ ) ( $i=a, \dots, \beta$ ) 象限とあるいは複数の  $n_i$  ( $n_i \in \{(2^{k_i+1})_1, \dots, (2^{k_i+1})_s\}$ ) ( $\theta=\theta, \dots, \theta$ ) 象限に存在するとき, ある  $\delta > 0$  に対して,  $m_i \in \{1, \dots, 2^{k_i}\}$ ,  $n_i \in \{(2^{k_i+1})_1, \dots, (2^{k_i+1})_s\}$ ;  $i=a, \dots, \beta$ ;  $\theta=\theta, \dots, \theta$  に対する各象限組合せ  $m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s$  に対応する集合  $L_{m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta)$  がいずれも有界であるならば, 系はBIBO安定である。このとき,  $f(t)$  は次のような終端上, 下界を有する。

$$F_{\zeta+} = \max_{m_i} \{ \sup N_{\zeta m_i}(u_1, \dots, u_k) \mid u_i \leq \max_{m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s} X_{i \zeta m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) \} \quad (\zeta=a, \dots, \beta), \quad (i=1, \dots, k)$$

$$F_{\theta-} = \max_{n_i} \{ \sup N_{\theta n_i}(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \leq \max_{m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s} Y_{i \theta m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) \} \quad (\theta=\theta, \dots, \theta), \quad (i=1, \dots, k) \quad \blacksquare$$

##### 4. 2 大域漸近安定性 (G. A. S.)

(23), (24) 式において,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} X_{i \zeta m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) = 0 \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} Y_{i \theta m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) = 0 \quad (i=1, \dots, k; \zeta=a, \dots, \beta; \theta=\theta, \dots, \theta)$$

が成立することを, 本論文では

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} L_{m_1 \dots m_s n_1 \dots n_s}(\delta) = 0$$

と表現する。ここでの0は零集合のことである。そして, 図1の系に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_i(t) = 0 \quad (i=1, \dots, k)$$

とする。もちろん、 $r_i(t) \equiv 0$  ( $i=1, \dots, k$ )をも含む。また、

$$\lim_{e_i \rightarrow 0 \ (i=1, \dots, k)} N_j(e_1, \dots, e_k) = 0 \quad (j=1, \dots, l)$$

と仮定する。すると、次の二つの定理を得る。ここに、定理1と定理2の関係により、定理3は定理4の特別ケースである。

定理3：定理1において、 $\delta \rightarrow 0$ のとき、単一集合  $L_{n_1, \dots, n_l, n_r}(\delta) \rightarrow 0$  (集合) ならば、系はG. A. S. である。 ■

定理4：定理2において、 $\delta \rightarrow 0$ のとき、すべての集合  $L_{n_1, \dots, n_l, n_r}(\delta) \rightarrow 0$  (集合) ならば、系はG. A. S. である。 ■

(以上の4つの定理の証明は付録に与えられている。)

[注意1] 上述した4つの定理は制御器の非線形特性の形などには何の制限条件をも課していないので、広いクラスの非線形制御系の安定解析に普遍的に適用可能であることを特徴としている。特に、制御器の非線形特性が多価関数、あるいは不連続部分を持った場合にも適用できる。このことは、連立不等式で定義された集合  $L_{n_1, \dots, n_l, n_r}(\delta)$  が象限特徴量関数  $N_{j+}$ 、あるいは  $N_{j-}$  の任意可能値にも適用できるからである。

[注意2] 諸定理における  $\delta$  の値の選び方について、集合  $L_{n_1, \dots, n_l, n_r}(\delta)$  は  $\delta$  の単調増加関数であるから、 $\delta_2 < \delta_1$  なら、 $L_{n_1, \dots, n_l, n_r}(\delta_2) \subset L_{n_1, \dots, n_l, n_r}(\delta_1)$  となり、 $X_{i+}(\delta_2) \leq X_{i+}(\delta_1)$ 、 $Y_{i+}(\delta_2) \leq Y_{i+}(\delta_1)$ 、そして  $F_{j+}(\delta_2) \leq F_{j+}(\delta_1)$ 、 $F_{j-}(\delta_2) \leq F_{j-}(\delta_1)$  となる。従って、最も小さい  $F_{j+}$  と  $F_{j-}$  を得るためには、 $\delta$  は小さいほどよい。また(5)式及び後述する補題2から分かるように、 $\delta$  の存在は  $|E_{i+}(t)|$  の存在を意味している。制御対象が線形・安定な系であるから、 $t \rightarrow \infty$  ならば、 $|E_{i+}(t)| \rightarrow 0$ 。従って、実際にG. A. S. を議論するとき、 $\delta = 0$  と取ってもよい。

[注意3] 本方法で安定解析するとき、よく知られている極移動変換をすることは有益なことがある(例題1を参照されたい)。特に①制御対象の伝達関数が不安定な極を持つ場合、たとえば速度型制御器の場合では伝達関数が虚軸上の極を含むため、(21)式で計算する  $A_{i+}$ 、 $A_{i-}$  が無限になるので、本方法が適用できなくなる。しかし、極移動変換を経て安定な線形部を得ると、本方法が適用できる。②制御器非線形特性を簡略化することができる場合に使う。簡略化前の非線形特性を用いる場合より、より緩やかな安定条件が得られることがある。

## 5. 例題

ここでは、簡単のため図3に示すような2入力1出力制御器を持つPD型非線形制御系を例とする。

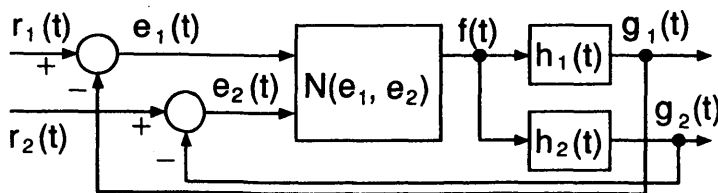


図3 2入力1出力制御器を持つ非線形制御系

例題 1 図3の系に対して、制御器の非線形特性には

$$N(e_1, e_2) = \begin{cases} e_1^3 \cdot e_2 + 2e_1 + e_2, & 0 < e_1, 0 < e_2 \\ 2e_1 + e_2, & \text{その他} \end{cases} \quad (25)$$

を対応させ、制御対象には

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \quad G_2(s) = \frac{1}{(s+2)}$$

を対応させる場合について、安定性を調べる。

まず、制御対象の伝達関数に不安定な  $1/s$  要素を含むため、注意3に述べたように、本提案法を適用できるようにするため、極移動変換を必要とする。また、(25)式の非線形特性から分かるように極移動変換を通じて非線形特性を簡略化することが可能である。いま、(24)式により  $k_1=2$ ,  $k_2=1$  とおいて、系に次のような極移動変換

$$\underline{f}(t) = f(t) - k_1 e_1 - k_2 e_2, \quad \underline{G}_i(s) = \frac{G_i(s)}{1 + k_1 G_1(s) + k_2 G_2(s)}$$

を行うと、新しい変数についての次のような系を得る。

$$\underline{f}(t) = \begin{cases} e_1^3 \cdot e_2, & 0 < e_1, 0 < e_2 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (26)$$

$$\underline{h}_1(t) = L^{-1} [\underline{G}_1(s)] = e^{-t} - e^{-2t} \quad (27)$$

$$\underline{h}_2(t) = L^{-1} [\underline{G}_2(s)] = -e^{-t} + 2e^{-2t} \quad (28)$$

明らかに、変換して得た新しい系は線形部が安定である。また、(26)式から分かるように本例では非線形特性が 1 象限だけに存在しているように簡略化された。ただし、ここでの下線は変換して得た新しい系を意味している。

次に、得た新しい変数について、系の安定性を調べる。

まず、(19), (20)式により次の非線形特性の象限特徴量を得る。

$$\underline{N}_{1,1}(u_1, u_2) = u_1^3 \cdot u_2; \quad \underline{N}_{1,\mu}(u_1, u_2) = 0 \quad (\mu=2, \dots, 8)$$

そして、(27), (28)式のインパルス応答  $\underline{h}_i(t)$  の正面積と負面積を(21)式により計算すると、

$$\underline{A}_{1+} = 0.5, \quad \underline{A}_{1-} = 0.0, \quad \underline{A}_{2+} = 0.25, \quad \underline{A}_{2-} = 0.25$$

を得る。次に、 $\underline{R}_{1+}=0$ ,  $\underline{R}_{1-}=0$ ,  $\underline{R}_{2+}=0$ ,  $\underline{R}_{2-}=0$  とし、集合  $L_{1,1}$  を得る。

$$\begin{aligned} L_{1,1} &= \{(x_{1,1}, x_{2,1}) \mid D_1, D_2\}, \\ D_1 &: x_{1,1} < \underline{A}_{1-} - \underline{N}_{1,1}(x_{1,1}, x_{2,1}) + \underline{R}_{1+} + \delta \\ D_2 &: x_{2,1} < \underline{A}_{2-} - \underline{N}_{1,1}(x_{1,1}, x_{2,1}) + \underline{R}_{2+} + \delta \\ &= \{(x_{1,1}, x_{2,1}) \mid D_1, D_2\}, \\ D_1 &: x_{1,1} < \delta \\ D_2 &: x_{2,1} < 0.25x_{1,1}^3 \cdot x_{2,1} + \delta \end{aligned}$$

明らかに、 $\delta \rightarrow 0$  のとき、 $L_{1,1} \rightarrow 0$  となる。ゆえに、定理3によって、系は G. A. S. である。

例題 2 図3の系に対し、制御対象は次式に対応させ、

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad G_2(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

制御器の非線形特性は図4<sup>15)</sup>に示すものと考えよう(これは高木・菅野の関数型ファジィ推論法<sup>3)</sup>により構成したファジィ制御器の非線形特性の1例である)。ただし、 $|e_1| > 20, |e_2| > 10$ の領域では、 $|e_1| = 20, |e_2| = 10$ の値を保持するものとする。

その制御器の非線形特性が $e_1 = 0, e_2 = 0$ のとき、 $f = 1.8^{15), 16)}$ であるため原点を通っていない。また、零操作線も直線ではないあるいはそのような直線は見出せない。したがって、ポポフ法と円板条件法は共に適用できない。次に本提案法を使って例題系の安定性を調べる。

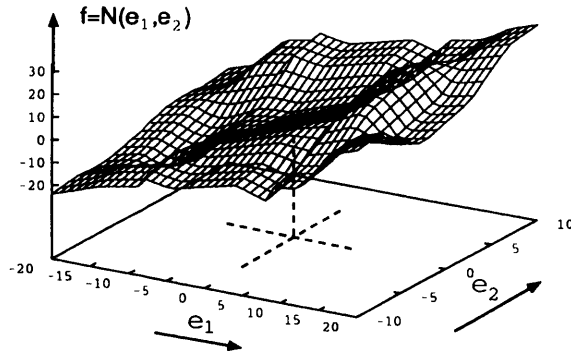


図4 例題2の系の制御器の非線形特性

まず、 $A_{i+}$ と $A_{i-}$ を(21)式により計算すると、 $A_{1+} = 0.167, A_{1-} = 0.000, A_{2+} = 0.074, A_{2-} = 0.074$ を得る。次に、図4から分かるように制御器の非線形特性が入出力空間のすべての象限に存在するから、3.4節により、16個の集合 $L_{m_1 n_1}$  ( $m_1 = 1, 2, 3, 4; n_1 = 5, 6, 7, 8$ )を構成する。そして、 $R_{1+} = 0, R_{1-} = 0, R_{2+} = 0, R_{2-} = 0, \delta = 0$ とし、これらの集合 $L_{m_1 n_1}$  ( $m_1 = 1, 2, 3, 4; n_1 = 5, 6, 7, 8$ )を数値的に計算すると、表1の結果が得られる。明らかに、各集合の各最大値はすべて有界である。つまり、すべての集合は有界である。ゆえに、定理2により系はB I B O安定である。

一方、本制御器の非線形特性は図4に示されているように原点を通らないため、系の偏差にオフセ

表1 例題2の集合 $L_{m_1 n_1}$  ( $m_1 = 1, 2, 3, 4; n_1 = 5, 6, 7, 8$ )の数値計算結果

$L_{m_1 n_1}$	$X_{11m_1 n_1}$	$X_{12m_1 n_1}$	$Y_{11m_1 n_1}$	$Y_{12m_1 n_1}$
$L_{1,5_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{1,6_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{1,7_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{1,8_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{2,5_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{2,6_1}$	0.20	0.10	0.20	0.10
$L_{2,7_1}$	0.20	0.10	0.20	0.10
$L_{2,8_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{3,5_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{3,6_1}$	0.20	0.10	0.20	0.10
$L_{3,7_1}$	0.20	0.10	0.20	0.10
$L_{3,8_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{4,5_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{4,6_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{4,7_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$L_{4,8_1}$	0.00	0.00	0.00	0.00

ットが生じることになる。これはデジタル・シミュレーション結果からも検証されている<sup>15), 16)</sup>。ゆえに、上で得られた解析結果は妥当な結果であることが分かる。

## 6. あとがき

本論文はHaddadの方法の拡張として、多入出力非線形制御系のBIBO安定性とG.A.S.の判別を制御器の非線形特性の象限特徴量、制御対象のインパルス応答の正、負面積、入力信号の終端上、下界に関する多次元非線形代数連立不等式からなる集合の有界性と収束性によって取り扱えることを示した。

本拡張法で得られた安定条件を与える集合については、形としては文献[10], [11]と似ているが、集合の要素の概念の違いによって不等式に対する解き方は異なる。つまり、文献[10], [11]では、集合の要素として、制御器の入力 $e_i$ の終端上、下界 $E_{i\pm}$ を用いている。そのため、連立不等式の中の非線形関数の終端上、下界は集合の要素 $E_{i\pm}$ に一意的対応関係を持たず、集合の計算にはある意味での最適化計算が必要となる。しかし、それに対して、本拡張法で得られる集合では、集合の要素としては、 $f_{i\pm}(t)$ の終端上、下界を与える入力信号 $e_i$ の絶対値を用いているため、連立不等式の中の非線形関数の終端上、下界は象限分割の考え方の導入により、集合の要素 $x_{i,j}, y_{i,j}$ に一意的対応関係を持つものである。そのため、集合の計算には最適化計算を必要としない。

また、文献[10], [11]では、制御器の出力非線形特性が原点を通り、かつ、制御器の入力のそれぞれについて単調増加であるという制約条件の下で得られた結果であるため、適用範囲が非常に狭い。実は文献[11]の結果は本論文の $m_i=1, n_i=7$  (2入力1出力の場合)の特別の場合だけに相当する。しかし、非線形特性が1,7象限だけに存在するケースは非常に少ないと考えられる。それに対して、本安定判別法では、制御器の非線形特性の形が何も制限されていないので、本判別法は広いクラスの非線形制御系の安定解析に普遍的に適用可能であることを特徴としている。特にルール型制御器を持つファジィ制御系などの安定解析に有効に適用できる<sup>12), 15), 16), 17)</sup>。

また、本方法によって安定性解析をするには、集合を求めるために制御器特性の入出力空間の象限分割を考えることを基本としているから、各象限にある非線形特性は系の安定性にどのような影響を与えるかを概ね理解できる。この情報はシステムの安定性設計に有用なことでありと考えている。特に、規則型制御系の場合(たとえばファジィ制御系)ではそれらの情報を活用して制御規則の調整を行うことによりシステムを安定化させる安定性設計法を具体化することも可能である<sup>18), 19), 20)</sup>。更に、系の安定条件を与える集合を導出するとき、集合を定める非線形不等式に制御器の非線形特性の各象限ごとの拡張したセクタ条件を導入することによって、系の安定解析結果の保守性(すなわち厳しさ)を改善するためのより緩い安定条件と集合を定める非線形不等式を線形代数不等式に変えて、系の安定解析を簡単化するための安定条件に発展させることを考えている<sup>21)</sup>。

しかし、本手法は入出力数の増加につれ、求める集合の数は指数的に増えるので、システムの安定解析にかなり時間がかかることが予想される。

## 参考文献

- (1) 計測自動制御学会編：自動制御ハンドブック基礎編，第I部6章，第II部3,4章，オーム社（1983）.
- (2) 平井，池田：非線形制御システムの解析，3章，4章，6章，オーム社（1986）.

- (3)菅野道夫：ファジィ制御，日刊工業新聞社（1988）.
- (4)日本ファジィ学会編：ファジィ制御，日刊工業新聞社（1993）.
- (5)山田，藪田：ニューラルネットワークを用いた適応型フォワードフィードバックコントローラ，計測自動制御学会論文集，Vol. 30, No. 10, 1234/1241（1994）.
- (6)北村新三：ニューラルネットワーク応用の現状と展望－計測制御の立場から，システム／制御／情報，Vol. 35, No. 1, 2/10（1991）.
- (7)前田，池田，児玉：不連続制御系の安定問題，計測と制御，第9巻，第5号，335/350（1970）.
- (8)Haddad, E. K. : New Criteria for Bounded-Input-Bounded-Output and Asymptotic Stability of Nonlinear System, Proc. 5th IFAC World Congress, 32.2, pp. 1-8（1972）.
- (9)高為炳：非線形制御系統導論，567/578，科学出版社（1991）.
- (10)A. I. Mees: Dynamics of Feedback Systems, Wiley, pp. 118-125,（1981）.
- (11)中西，森，黒江：ファジィ制御系解析のための多入力非線形システムの安定判別法，SICE'96, 105 D-4 pp. 147-148,（1996）.
- (12)王，松本，辻：2入力1出力非線形制御系のBIBO安定性とファジィ制御システムへの応用，平成5年度電気関係学会北陸支部連合大会，B-11（1993）.
- (13)王，松本：多入出力非線形制御システムの安定性について，平成6年度電気関係学会北陸支部連合大会，B-28（1994）.
- (14)王，松本：多入出力非線形制御システムの安定解析，電子情報通信学会非線形問題研究会，NL P94-81（1994.12）.
- (15)王，松本：ファジィ制御システムの安定解析について，電子情報通信学会非線形問題研究会，NLP94-82（1994.12）.
- (16)X. WANG and T. MATSUMOTO: New Time-Domain Stability Criterion for Fuzzy Control Systems, Trans. on Fundamentals of IEICE, Vol. E79-A, No. 10, 1700-1706（1996）.
- (17)王，松本：ファジィ制御系の時間領域安定解析，日本ファジィ学会誌，第9巻，第5号，（1997）.
- (18)王，松本：ファジィ制御システムの安定設計について，電子情報通信学会ソサイエティ大会，A-33,（1996-9）.
- (19)王，松本：ファジィ制御システムの安定設計に関する考察，平成8年度電気関係学会北陸支部連合大会，B-11,（1996-10）.
- (20)王，松本：ファジィ制御系の安定設計，電子情報通信学会非線形問題研究会，NLP96-161（1997.3）.
- (21)王，松本：ファジィ制御系の時間領域安定十分条件に関する考察，第6回日本ファジィ学会北信越支部シンポジウム，（1997-09-19/20）.

## 付録 定理の証明

諸定理の証明のため，以下の五つの補題を必要とする。

補題1. 任意  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq a$  に対し，  $T > b$  が存在して，  $t > T$  のとき，次式を得る。

$$\sum_{j=1}^k \int_a^b h_{ij}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau < \varepsilon_0. \quad (\forall i=1, \dots, k)$$

■

補題 1 の証明. 任意  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq a$  を与える. まず, 系が有限逃避時間がないことと制御対象が線形・時間不変かつ安定な系であることから, 次式を得る.

$$|f_j(t)| < F, \quad a < t < b; \quad |h_{i,j}(t-\tau)| \leq M \exp[-\alpha(t-\tau)] \quad \forall i, j$$

ただし,  $F$ ,  $M$  及び  $\alpha$  は有限な正数である. すると,

$$t \geq T = \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\lambda M F}{\alpha \varepsilon_0} \exp[\alpha(b-a)] \right], b \right\} \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\lambda} \int_a^b h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau &\leq \sum_{j=1}^{\lambda} \int_a^b M F \exp[-\alpha(t-\tau)] d\tau \\ &= \lambda M F \exp[-\alpha t] \frac{1}{\alpha} \exp[\alpha(b-a)] < \varepsilon_0 \quad (\forall i=1, \dots, k) \end{aligned}$$

となり, 補題が成立する. [証明終]

補題 2. 任意に与えられる  $\varepsilon > 0$ , 任意の正整数  $l$  及び  $t \geq T_{l+1}$  に対して

$$\begin{aligned} e_i(t) &= E_{i,1}(t) + r_i(t) - \sum_{j=1}^{\lambda} \int_{T_i}^t h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau, \\ |E_{i,1}(t)| &< \varepsilon, \quad -R_{i,-} \leq r_i(t) \leq R_{i,+} \quad (\forall i=1, \dots, k) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

を満足する単調発散系列  $T_l: 0 < T_1 < T_2 \dots$  を造ることができる. ■

補題 2 の証明. (2) 式のシステム方程式から

$$e_i(t) = r_i(t) - g_{i,0}(t) - \sum_{j=1}^{\lambda} \int_0^{T_i} h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^{\lambda} \int_{T_i}^t h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau$$

が得られる. すると, (A.1) 式から分かるように,

$$E_{i,1}(t) = -g_{i,0}(t) - \sum_{j=1}^{\lambda} \int_0^{T_i} h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau$$

である. そして,

$$-R_{i,-} \leq r_i(t) \leq R_{i,+}, \quad |g_{i,0}(t)| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

を保証する十分大きな  $T_1$  を取ると, 補題 1 によって,  $T_2 > T_1$  が存在して

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\lambda} \int_0^{T_i} h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \right| &< \frac{1}{2} \varepsilon, \quad t \geq T_2 \\ |E_{i,1}(t)| &\leq |g_{i,0}(t)| + \left| \sum_{j=1}^{\lambda} \int_0^{T_i} h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \right| < \varepsilon, \quad t \geq T_2 \end{aligned}$$

を得る.

$$E_{i,2}(t) = -g_{i,0}(t) - \sum_{j=1}^{\lambda} \int_0^{T_i} h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau$$

に対して, 補題 1 によって,  $T_3 > T_2$  が存在して

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\lambda} \int_0^{T_i} h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \right| &< \frac{1}{2} \varepsilon, \quad |g_{i,0}(t)| < \frac{1}{2} \varepsilon, \quad t \geq T_3 \\ |E_{i,2}(t)| &\leq |g_{i,0}(t)| + \left| \sum_{j=1}^{\lambda} \int_0^{T_i} h_{i,j}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \right| < \varepsilon, \quad t \geq T_3 \end{aligned}$$

を得る. 以上のことを続けていくと, 求める系列  $T_l: 0 < T_1 < T_2 \dots$  が造れる. [証明終]

次の二つの補題については,  $\lambda = 1$  ( $j=1$ ) の場合は文献 8 に与えられているが,  $\lambda > 1$  の場合で

も図5に示すように補題3、4が成立することは明らかである。

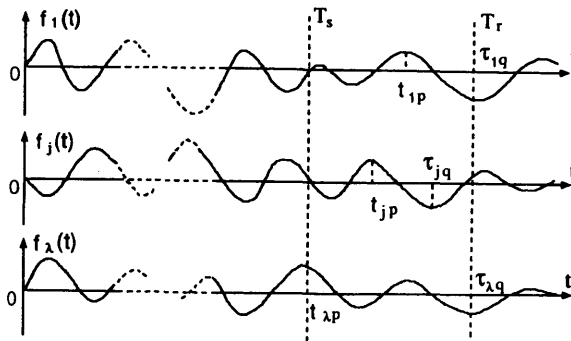


図5 多入力多出力の場合の波形定義

補題3. 全ての  $f(t)$  の成分  $f_j(t)$  ( $j=1, \dots, l$ ) に対して,

$$f_{j+}(t_{jp}) = \max_{[T_s, T_r]} f_j+(t), \quad f_{j-}(t_{jq}) = \max_{[T_s, T_r]} f_j-(t)$$

を満たす正整数  $s, p, q, r$  を見つけることができる。 ■

補題4. もし、 $P$  が  $P \geq r > p$ ,  $f_{j+}(t_{jp}) > f_{j+}(t_{jp})$  を満たす一番目の整数であれば(もしそれが存在すれば), 補題3の中の  $p, q, r$  を  $P, Q, R$  で取り替えて, 補題3が依然として成立するような  $Q$  及び  $R$  の二つの正整数を見つけ得る。 ■

補題5.  $x_{ij} \equiv |e_i(t_{jp})|$ ,  $y_{ij} \equiv |e_i(t_{jq})|$  ( $\forall i=1, \dots, k; j=1, \dots, l$ ) とする。非線形特性が  $m_\sigma, \dots, m_\theta, n_\sigma, \dots, n_\theta$  ( $m_\sigma \in \{1, \dots, 2^k\}$ ,  $n_\sigma \in \{(2^k+1), \dots, (2^{k+1})\}$  ( $\sigma=\sigma, \dots, \theta$ ;  $\theta=\theta, \dots, \theta$ )) 象限に存在すれば, 次式が成立する。

$$f_{\zeta+}(t_{\zeta p}) = N_{\zeta m_\zeta}(x_{1\zeta}, \dots, x_{k\zeta}), \quad f_{\theta-}(t_{\theta q}) = N_{\theta n_\theta}(y_{1\theta}, \dots, y_{k\theta}), \quad (x_{i\zeta}, y_{i\theta}) \in L_{m_\sigma, \dots, m_\theta, n_\sigma, \dots, n_\theta}(\delta) \\ (i=1, \dots, k; \zeta=\sigma, \dots, \theta; \theta=\theta, \dots, \theta)$$

補題5の証明  $f_\zeta(t) = N_\zeta(e_1, \dots, e_k)$  の中で  $f_\zeta > 0$  では  $f_{\zeta+}(t_{\zeta p}) = N_{\zeta m_\zeta}(x_{1\zeta}, \dots, x_{k\zeta})$ ,  $x_{i\zeta} = |e_i(t_{\zeta p})|$  ( $i=1, \dots, k; \zeta=\sigma, \dots, \theta$ ) を,  $f_\theta(t) = N_\theta(e_1, \dots, e_k)$  の中で  $f_\theta < 0$  では  $f_{\theta-}(t_{\theta q}) = N_{\theta n_\theta}(y_{1\theta}, \dots, y_{k\theta})$ ,  $y_{i\theta} = |e_i(t_{\theta q})|$  ( $i=1, \dots, k; \theta=\theta, \dots, \theta$ ) を得る。そして, 補題2より

$$e_i(t_{jp}) = E_{is}(t_{jp}) + r_i(t_{jp}) - \sum_{b=1}^l \int_{T_s}^{t_{jp}} h_{ib}(t_{jp}-t) f_b(t) dt, \\ |E_{is}(t_{jp})| < \varepsilon, \quad -R_i \leq r_i(t_{jp}) \leq R_i$$

を得る。また,  $[T_s, t_{jp}]$  の上で, 補題3より次式を得る。

$$0 \leq f_{b+}(u) \leq \max_{[T_s, t_{jp}]} f_{b+}(t) \leq \max_{[T_s, T_r]} f_{b+}(t) = f_{b+}(t_{bp}) = N_{bm_b}(x_{1b}, \dots, x_{kb}) \\ 0 \leq f_{b-}(u) \leq \max_{[T_s, t_{jp}]} f_{b-}(t) \leq \max_{[T_s, T_r]} f_{b-}(t) = f_{b-}(t_{bq}) = N_{bn_b}(y_{1b}, \dots, y_{kb}) \\ (b=1, \dots, l)$$

いま,  $m_\zeta$  象限に  $e_i > 0$  であるならば,

$$x_{i\zeta} = |e_i(t_{\zeta p})| = e_i(t_{\zeta p}) \\ = E_{is}(t_{\zeta p}) + r_i(t_{\zeta p}) - \sum_{b=1}^l \int_{T_s}^{t_{\zeta p}} h_{ib}(t_{\zeta p}-t) f_b(t) dt$$



$$\begin{aligned}
&< \varepsilon + R_i + \sum_{b=1}^{\lambda} \int_{T_i}^{t_{i\ell}} h_{ib}(t_{i\ell p} - t) f_b(t) dt \\
&\leq \varepsilon + R_i + \sum_{b=1}^{\lambda} \int_{T_i}^{t_{i\ell}} h_{ib}(t_{i\ell p} - t) f_b(t) dt \\
&\quad + \sum_{b=1}^{\lambda} \int_{T_i}^{t_{i\ell}} h_{ib+}(t_{i\ell p} - t) f_{b+}(t) dt + \sum_{b=1}^{\lambda} \int_{T_i}^{t_{i\ell}} h_{ib-}(t_{i\ell p} - t) f_{b-}(t) dt \\
&\leq \varepsilon + R_i + \sum_{b=\alpha}^{\beta} N_{bm+}(x_{1b}, \dots, x_{kb}) \int_{T_i}^{t_{i\ell}} h_{ib-}(t_{i\ell p} - t) dt + \sum_{b=\phi}^{\theta} N_{bn+}(y_{1b}, \dots, y_{kb}) \int_{T_i}^{t_{i\ell}} h_{ib+}(t_{i\ell p} - t) dt \\
&= \varepsilon + R_i + \sum_{b=\alpha}^{\beta} N_{bm+}(x_{1b}, \dots, x_{kb}) \int_{t_{i\ell}-T_i}^0 h_{ib-}(t) dt - \sum_{b=\phi}^{\theta} N_{bn+}(y_{1b}, \dots, y_{kb}) \int_{t_{i\ell}-T_i}^0 h_{ib+}(t) dt \quad (t_{i\ell p} - t = t) \\
&\leq \varepsilon + R_i + \sum_{b=\alpha}^{\beta} N_{bm+}(x_{1b}, \dots, x_{kb}) \int_0^{\infty} h_{ib-}(t) dt + \sum_{b=\phi}^{\theta} N_{bn+}(y_{1b}, \dots, y_{kb}) \int_0^{\infty} h_{ib+}(t) dt \\
&\leq \varepsilon + R_i + \sum_{b=\alpha}^{\beta} N_{bm+}(x_{1b}, \dots, x_{kb}) A_{ib-} + \sum_{b=\phi}^{\theta} N_{bn+}(y_{1b}, \dots, y_{kb}) A_{ib+} \quad (A.2)
\end{aligned}$$

次に、 $e_i < 0$ の場合では、上と同様に次式が得られる。

$$x_{i\ell} = |e_i(t_{i\ell p})| = -e_i(t_{i\ell p}) < \varepsilon + R_i + \sum_{b=\alpha}^{\beta} N_{bm+}(x_{1b}, \dots, x_{kb}) A_{ib+} + \sum_{b=\phi}^{\theta} N_{bn+}(y_{1b}, \dots, y_{kb}) A_{ib-} \quad (A.3)$$

そして、3.4節に述べた記号表示を用いると、(A.2)式と(A.3)とは次の(A.4)式に統一できる。

$$x_{i\ell} < \varepsilon + R_{im\ell} + \sum_{b=\alpha}^{\beta} N_{bm+}(x_{1b}, \dots, x_{kb}) A_{ib\bar{m}} + \sum_{b=\phi}^{\theta} N_{bn+}(y_{1b}, \dots, y_{kb}) A_{ibm\ell} \quad (A.4)$$

同様に、 $n_{\theta}$ 象限には次式を得ることができる。

$$y_{i\theta} < \varepsilon + R_{in\theta} + \sum_{b=\alpha}^{\beta} N_{bm+}(x_{1b}, \dots, x_{kb}) A_{ib\bar{n}} + \sum_{b=\phi}^{\theta} N_{bn+}(y_{1b}, \dots, y_{kb}) A_{ibn\theta}$$

そして、 $\delta = \varepsilon$ と取ると、 $(x_{i\ell}, y_{i\theta}) \in L_{m_1, \dots, m_\beta, n_1, \dots, n_\theta}(\delta)$ を得て、補題が成立する。 [証明終]

**定理1の証明** 非線形特性が $m_\alpha, \dots, m_\beta, n_\alpha, \dots, n_\theta$  ( $m_\ell \in \{1, \dots, 2^k\}$ ,  $n_\theta \in \{(2^{k+1})_\theta, \dots, (2^{k+1})_\theta\}$  ( $\ell = \alpha, \dots, \beta$ ;  $\theta = \theta, \dots, \theta$ )) 象限に存在することから、補題3で述べた $t_{i\ell p}$ ,  $t_{i\theta q}$ を考えよう。 $(x_{i\ell}, y_{i\theta})$  ( $i=1, \dots, k$ ;  $\ell = \alpha, \dots, \beta$ ;  $\theta = \theta, \dots, \theta$ )の上で補題5によつて $f_{\ell+}(t_{i\ell p}) = N_{\ell m_\ell}(x_{1\ell}, \dots, x_{k\ell})$ ,  $f_{\theta-}(t_{i\theta q}) = N_{\theta n_\theta}(y_{1\theta}, \dots, y_{k\theta})$ ,  $(x_{i\ell}, y_{i\theta}) \in L_{m_1, \dots, m_\beta, n_1, \dots, n_\theta}(\delta)$ を得る。しかも $L_{m_1, \dots, m_\beta, n_1, \dots, n_\theta}(\delta)$ が有界であるから、 $x_{i\ell} \equiv |e_i(t_{i\ell p})| \leq X_{\ell m_\ell, m_1, \dots, m_\beta, n_1, \dots, n_\theta}$ となり、

$$f_{\ell+}(t_{i\ell p}) = N_{\ell m_\ell}(x_{1\ell}, \dots, x_{k\ell}) \leq \sup_{z_i \leq X_{\ell m_\ell, m_1, \dots, m_\beta, n_1, \dots, n_\theta}} N_{\ell m_\ell}(z_1, \dots, z_k) = F_{\ell+}$$

を得る。いま $F_{\ell+}$ は $f_{\ell+}(t)$ の終端上界であること、すなわち

$$f_{\ell+}(t) \leq F_{\ell+}, \quad t \geq t_{i\ell p}$$

を証明する。

もし、 $F_{\ell+}$ は $f_{\ell+}(t)$ の終端上界でなければ、つまり、 $t_{i\ell p}$ は $t_{i\ell}$ 系列の中の

$$t_{i\ell p} > t_{i\ell p}, \quad f_{\ell+}(t_{i\ell p}) > F_{\ell+} \geq f_{\ell+}(t_{i\ell p}) \quad (A.5)$$

を満たす第一番目の時間点であれば、補題4によつて、 $t_{i\ell p}$ を $t_{i\ell p}$ と取り替えると、補題3は依然として成立する。そうすると、上のような証明を繰り返せば、

$$f_{\ell+}(t_{i\ell p}) \leq F_{\ell+} \quad (A.6)$$

が得られる。しかし、 $X_{i\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}, L_{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta), F_{\zeta+}$ の値は  $p, P$  に依存しないから、上で得られている (A. 6) 式は (A. 5) 式に矛盾する。ゆえに  $F_{\zeta+}$  は  $f_{\zeta+}(t)$  の終端上界である。同じように、 $F_{\zeta-}$  は  $f_{\zeta-}(t)$  の終端下界であることを証明できる。 [証明終]

定理 2 の証明 まず、ここでの象限組合せ  $m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k$  の表示は一般的表示であるから、非線形特性のすべての存在形態にも適用できる。そして、 $m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k$  のすべてのケースに対し、集合  $L_{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta)$  が共に有界であるから、 $x_{i\zeta} \equiv |e_i(t_{i\zeta})| \leq X_{i\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta)$  となり、

$$f_{\zeta+}(t_{i\zeta p}) = N_{\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(x_{1\zeta}, \dots, x_{k\zeta}) \leq \max \{ \sup N_{\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(z_1, \dots, z_k) \mid z_i \leq \max_{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k} X_{i\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta) \} = F_{\zeta+} \\ (\forall i=1, \dots, k; \zeta=a, \dots, \beta)$$

を得る。そして、定理 1 の証明と同様に、 $F_{\zeta+}$  と  $F_{\zeta-}$  はそれぞれ  $f_{\zeta+}(t)$  と  $f_{\zeta-}(t)$  の終端上、下界であることを証明できる。(証明の詳細は省略) [証明終]

定理 3 の証明 定義によって、 $\delta \rightarrow 0$  のとき、 $L_{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta) \rightarrow 0$  (集合) であるから、

$$X_{i\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta) \rightarrow 0, Y_{i\theta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta) \rightarrow 0 \quad (i=1, \dots, k; \zeta=a, \dots, \beta; \theta=\theta, \dots, \theta)$$

を得る。また、 $e_i \rightarrow 0 (i=1, \dots, k)$  のとき

$$\lim_{e_i \rightarrow 0} N_j(e_1(t), \dots, e_k(t)) = 0 \quad (i=1, \dots, k; j=1, \dots, l)$$

を得るから、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_{\zeta+}(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \sup N_{\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(u, \dots, u_i) \mid u_i \leq X_{i\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta) \} = 0 \quad (\zeta=a, \dots, \beta), (i=1, \dots, k) \quad (A. 7)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_{\zeta-}(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \sup N_{\theta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(v, \dots, v_i) \mid v_i \leq Y_{i\theta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta) \} = 0 \quad (\theta=\theta, \dots, \theta), (i=1, \dots, k) \quad (A. 8)$$

すると、任意に与える  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\delta_1$  が存在し、

$$F_{\zeta+}(\delta_1) < \varepsilon, F_{\zeta-}(\delta_1) < \varepsilon$$

を得る。また  $F_{\zeta+}(\delta_1)$  は  $f_{\zeta+}(t)$  の終端上界であり、 $F_{\zeta-}(\delta_1)$  は  $f_{\zeta-}(t)$  の終端下界であるから、 $T$  が存在し、 $t \geq T$  のとき、

$$f_{\zeta+}(t) \leq F_{\zeta+}(\delta_1) < \varepsilon, f_{\zeta-}(t) \leq F_{\zeta-}(\delta_1) < \varepsilon$$

を得る。これは  $t \rightarrow \infty$  のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{\zeta+}(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} f_{\zeta-}(t) = 0 \quad (\zeta=a, \dots, \beta; \theta=\theta, \dots, \theta)$$

を意味している。ゆえに、系は G. A. S. である。 [証明終]

定理 4 の証明 定理 3 の証明の中で象限組合せ  $m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k$  の全てのケースを考慮して、(A. 7)、(A. 8) 式の代わりに、次の両式を使うと、定理 4 の証明が完成される。(詳細な証明は省略) [証明終]

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_{\zeta+}(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \max_{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k} \{ \sup N_{\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(u, \dots, u_i) \mid u_i \leq \max_{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k} X_{i\zeta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta) \} \} = 0 \quad (\zeta=a, \dots, \beta), (i=1, \dots, k)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_{\zeta-}(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \max_{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k} \{ \sup N_{\theta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(v, \dots, v_i) \mid v_i \leq \max_{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k} Y_{i\theta m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k}(\delta) \} \} = 0 \quad (\theta=\theta, \dots, \theta), (i=1, \dots, k)$$